

Hermanns Schrift über das Zahlenkampfspiel (Rithmomachie)

Menso Folkerts

Die Rithmomachie ist ein Brettspiel, das seinen Ursprung in der theoretischen Arithmetik hat. Es dient auch dazu, Hilfen zu geben, die für das Rechnen auf dem Rechenbrett nützlich sind. Das Spiel wurde in der ersten Hälfte des 11. Jahrhunderts erfunden, und Hermann hat sich schon mit der ersten schriftlich fixierten Fassung auseinandergesetzt.

In diesem Aufsatz werden zunächst die wesentlichen Elemente des Spiels und die Grundlagen erklärt, auf denen es beruht. Dann folgen Bemerkungen zur Entstehung des Spiels und zu Hermanns Beiträgen, um Unklarheiten zu beseitigen. Die Arbeit endet mit einem Ausblick über die weitere Geschichte des Spiels.

1. Überblick über die wesentlichen Elemente

Die grundlegende Arbeit zur Geschichte der Rithmomachie stammt von Arno Borst¹. Einen guten Einblick in das Spiel bieten die bildlichen Darstellungen des Spielbretts mit seinen Figuren. Abb. 1 zeigt die wesentlichen Elemente des Spiels, allerdings in einer späten Form:

a) Es wird auf einem Brett mit 8×16 Feldern gespielt, das also doppelt so groß wie ein Schachbrett ist.

b) Es spielen zwei Mannschaften mit schwarzen bzw. weißen Spielsteinen. Jede Mannschaft hat 24 Steine. Es gibt drei Arten von Steinen: je 8 runde, dreieckige und viereckige. Alle tragen Zahlen. Die kleinsten Steine bei der „weißen“ Mannschaft sind 2, 4, 6, 8, bei der „schwarzen“ Mannschaft sind es 3, 5, 7, 9.

c) Es gibt zwei besondere Steine, die „Türme“. Bei der weißen Mannschaft ist es die 91, bei der schwarzen die 190.

d) Die Figuren bewegen sich nach speziellen Regeln, die nach den drei Arten der Steine spezifiziert sind. Um die Regeln anzuwenden, muss man addieren und multiplizieren können. Es geht darum, gegnerische Steine zu erobern.

¹ Vgl. Arno BORST, Das mittelalterliche Zahlenkampfspiel (Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Philosophisch-historische Klasse, Supplemente, Bd. 5), Heidelberg 1986. Außerdem: Menso FOLKERTS, Art. Rithmimachia, in: Die deutsche Literatur des Mittelalters. Verfasserlexikon, Bd. 8, Berlin/New York ²1990, Sp. 86–94; DERS., Rithmimachie, in: Maß, Zahl und Gewicht. Mathematik als Schlüssel zu Weltverständnis und Weltbeherrschung, hg. von DEMS./Eberhard KNOBLOCH/Karin REICH (Ausstellungskataloge der Herzog August Bibliothek, Bd. 60), Wiesbaden ²2001, S. 333–340; DERS., „Rithmomachia“, a Mathematical Game from the Middle Ages, in: DERS., Essays on Early Medieval Mathematics. The Latin Tradition, Aldershot 2003, Nr. XI.

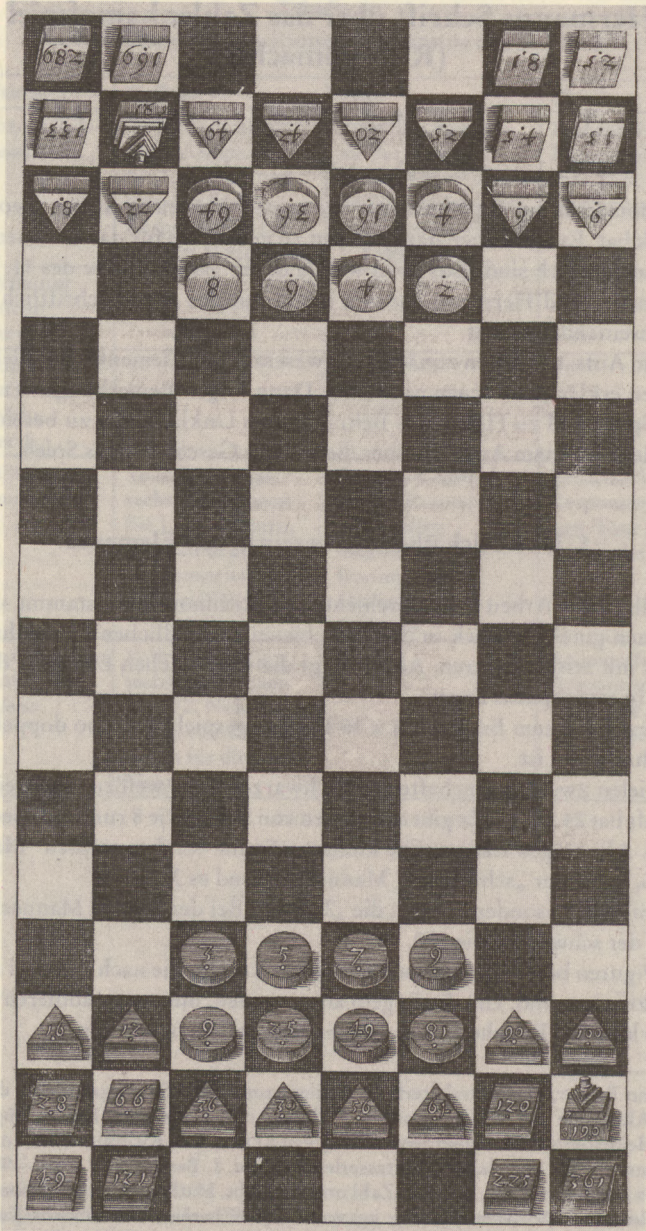


Abb. 1: Spielbrett und Spielsteine nach Gustavus SELENUS, Das Schach- oder König-Spiel, Leipzig 1616, nach S. 464.

e) Das Ziel des Spiels besteht nicht darin, alle oder möglichst viele Steine des Gegners zu schlagen. Vielmehr genügt es, eigene und geschlagene gegnerische Steine so nebeneinander aufzubauen, dass die Kopffzahlen bestimmten mathematischen Proportionen genügen.

In den ältesten Darstellungen hat das Spiel noch keinen Namen. Später heißt es *Rithmarchia*, *Rithmomachia*, *Rithmimachia* oder ähnlich. Das Wort wird auf *rhythmus* (= *numerus*) und *machia* (= *pugna*) zurückgeführt. Dabei ist *rhythmus* wahrscheinlich keine verderbte Form von *arithmos*, sondern bezeichnet, wie auch sonst in der mittelalterlichen Musiktheorie, das Verhältnis zweier Zahlen.

2. Grundlagen

Um Hermanns Schrift zu verstehen und historisch einordnen zu können, muss man die Grundlagen, auf denen sie beruht, kennen. Dies ist die griechische Zahlentheorie, die auf die Pythagoreer zurückgeht. Boethius hat sie um 500 in seiner „Arithmetik“ zusammenfassend dargestellt, und diese Schrift bildete während des ganzen Mittelalters die Basis für alle Arbeiten zur theoretischen Arithmetik. Die Elemente, die für das Verständnis des Spiels zentral sind, betreffen drei Komplexe: Definition und Einteilung der Zahlen, Verhältnisse zwischen Zahlen, Bestimmung „mittlerer Zahlen“ zwischen zwei gegebenen Zahlen.

Die Griechen verstanden unter „Zahlen“ nur die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ..., wobei die Eins, streng genommen, keine Zahl ist, sondern die Einheit, aus der die Zahlen erzeugt werden. Die Brüche waren in diesem Sinne also keine Zahlen, und in der *wissenschaftlichen* Mathematik der Griechen spielen die Brüche kaum eine Rolle. Natürlich wurde in der *Praxis* mit Brüchen gearbeitet, aber hier geht es um die *theoretische* Arithmetik, um die Zahlentheorie, die durch Boethius ins christliche Mittelalter gelangte. Bei den Zahlen unterschied man die geraden und die ungerade Zahlen; andere Gruppen (z. B. die Primzahlen und die vollkommenen Zahlen) spielen in unserem Zusammenhang keine Rolle.

Es war üblich, zwei oder mehr Zahlen in eine Relation zu setzen. So entstand die Proportionenlehre, also die Lehre von den Verhältnissen. Sie nimmt einen zentralen Platz in der Zahlentheorie ein. Aus unserer Sicht ist das Verhältnis 1 : 2 gleichwertig zum Bruch $1/2$, aber im Verständnis der Griechen handelte es sich um zwei verschiedene Dinge: Bei den Proportionen werden zwei Zahlen in Beziehung gesetzt, während ein Bruch keine „Zahl“ ist, sondern eine Größe, mit der man zwar rechnen kann, die aber in der wissenschaftlichen Mathematik keinen Platz hat. Die Proportionenlehre spielt auch in der Musiktheorie eine besondere Rolle, weil sich die Harmonien durch die einfachsten Zahlenverhältnisse darstellen lassen: die Oktave entspricht dem Verhältnis 2:1, die Quinte ist 3:2 und die Quarte 4:3. Hier werden also die ersten vier Zahlen ins Verhältnis gesetzt, wobei die erste Zahl in der Proportion gerade um 1 größer ist als die zweite.

Dies leitet über zur Klassifikation der Proportionen. Wenn zwei Zahlen a und b gegeben sind und a größer als b ist, unterschied man zunächst einmal drei Fälle von Verhältnissen, und zwar (in der Bezeichnungsweise von Boethius):

proportio multiplex: $a : b = mn : n$

proportio superparticularis: $a : b = (n+1) : n = 1 + 1:n$

proportio superpartiens: $a : b = (n+m) : n = 1 + m:n$ (mit $n > m > 1$).

Im ersten Fall ist a also ein Vielfaches von b , Beispiele dafür wären: 2:1, 3:1, 4:1, ..., 4:2, 6:2, 8:2, ...

Im zweiten Fall ist a um 1 größer als b . b ist also einmal ganz in a enthalten, und es bleibt noch ein Bruchteil von b übrig. Beispiele sind: 3:2, 4:3, 5:4, ... Für die einzelnen Proportionen gibt es bestimmte Namen: 2:1 heißt *proportio sesquialtera*, 3:2 *sesquitertia*, 4:3 *sesquiquarta* usw.

Im dritten Fall ist a um mehr als 1 größer als b , aber kleiner als $2b$. b ist also einmal ganz in a enthalten, und es bleiben noch mehrere Bruchteile von b übrig. Beispiele sind: 5:3, 7:4, 7:5, 9:5, 9:7, ... Für den Fall, dass $m = n - 1$ ist, gibt es spezielle Namen. 5:3 heißt *proportio superbipartiens*, 7:4 *supertripartiens*, 9:5 *superquadripartiens* usw.

Man sieht, dass die Oktave, Quarte und Quinte zu den *multiplikes* bzw. *superparticulares* zählen. Es gibt bei Boethius noch andere Klassen von Proportionen, die aber hier keine Rolle spielen.

Ein weiteres zentrales Element in der theoretischen Arithmetik ist die Bildung von Mittelwerten zwischen zwei Ausgangszahlen a und b . Man unterschied drei Arten von Mittelwerten. Das „arithmetische Mittel“ ist die Zahl, die von den beiden Ausgangszahlen gleich weit „entfernt“ ist, also z. B. die Zahl 7, wenn die Zahlen 4 und 10 gegeben sind. Das „geometrische Mittel“ hat die Eigenschaft, dass sein Verhältnis zu den Ausgangszahlen gleich ist, und das „harmonische Mittel“ ist eine Kombination zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel. Hier folgen die Definitionen der drei Mittel, zunächst nach der antiken Vorstellung und dann in der heutigen Schreibweise:

Gegeben sind zwei (natürliche) Zahlen a und b mit $b > a$. Dann gilt:

(für das arithmetische Mittel A): $b - A = A - a$. Modern: $A = (a+b)/2$;

(für das geometrische Mittel G): $b : G = G : a$. Modern: $G = \sqrt{a \cdot b}$;

(für das harmonische Mittel H): $(b-H) : b = (H-a) : a$. Modern: $H = 2ab/(a+b)$.

Beispiele dafür sind: Für $b = 12$ und $a = 6$ ist $A = 9$ und $H = 8$. Für $b = 16$ und $a = 4$ ist $G = 8$.

Es ist klar, dass es oft vorkommt, dass die Mittel zwischen zwei Ausgangszahlen keine „Zahlen“ im Sinne der Griechen sind, also keine natürlichen Zahlen. Arithmetische und harmonische Mittel können Brüche sein, und geometrische Mittel sind oft Wurzelausdrücke, d. h. irrationale Zahlen.

3. Entstehung des Spiels

Boethius' „Arithmetik“ wurde während des ganzen Mittelalters intensiv studiert und war eine der wichtigsten Lehrschriften an den klösterlichen Schulen und an den Universitäten. Fast 200 Handschriften sind bekannt, die dieses Werk ganz oder in Teilen überliefern. Seit dem 9. Jahrhundert gibt es Einleitungen, Scholien, Glossen und Kommentare, und es entstanden Bearbeitungen der „Arithmetik“². Eine besondere Rolle in der Überlieferung von Boethius' „Arithmetik“ spielte Gerbert von Aurillac, der spätere Papst Silvester II. († 1003). Er schickte eine Handschrift an Kaiser Otto III. und betonte in einem Brief an den Kaiser die grundlegende Bedeutung des Werks. Darüber hinaus veranlasste ihn eine Stelle in der „Arithmetik“ zu einem Verfahren, das später als *saltus Gerberti* bezeichnet wurde. Er benutzte Methoden von Boethius, um zu zeigen, dass Zahlentripel, die in einem bestimmten Verhältnis stehen, durch elementare Umformungen sukzessive auf das einfachste Tripel (1, 1, 1) zurückgeführt werden können³. Auch Abbo von Fleury beschäftigte sich mit diesem Problem.

In Verbindung mit Boethius' „Arithmetik“ steht auch eine kleine Schrift mit dem Titel *De aggregatione naturalium numerorum*, die nur aus einer Handschrift aus dem 11. Jahrhundert bekannt ist⁴. Sie besteht aus zwei Teilen. Zunächst werden Regeln über die Berechnung arithmetischer Reihen gegeben⁵. Interessanter ist der

² Moderne Editionen: Boèce. *Institution arithmétique*. Texte établi et traduit par Jean-Yves GUILLAUMIN, Paris 1995 sowie Anicii Manlii Severini Boethii opera. Bd. 2: *De arithmetica*, cura et studio Henrici OOSTHOUT/Iohannis SCHILLING (Corpus Christianorum. Series Latina, Bd. 94A), Turnhout 1999. Englische Übersetzung: Michael MASI, *Boethian Number Theory. A translation of the De Institutione Arithmetica* (Studies in classical antiquity, Bd. 6), Amsterdam 1983. Zum Weiterwirken siehe z. B. Boethius and the Liberal Arts. A Collection of Essays, hg. von Michael MASI (Utah studies in literature and linguistics, Bd. 18), Bern/Frankfurt a. M./Las Vegas 1981; Alison WHITE, *Boethius in the Medieval Quadrivium*, in: Boethius: His Life, Thought and Influence, hg. von Margaret GIBSON, Oxford 1981, S. 162–205, v. a. S. 174–186; Gillian R. EVANS, *A Commentary of Boethius's Arithmetica of the Twelfth or Thirteenth Century*, in: *Annals of Science* 35 (1978) S. 131–141; DIES., *Introductions to Boethius's „Arithmetica“ of the Tenth to the Fourteenth Century*, in: *History of Science* 16 (1978) S. 22–41; Michael BERNHARD, *Glossen zur Arithmetik des Boethius*, in: *Scire litteras. Forschungen zum mittelalterlichen Geistesleben*, hg. von Sigrid KRÄMER/Michael BERNHARD (Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, N. F. Bd. 99), München 1988, S. 23–34. Eine systematische Untersuchung steht noch aus.

³ Siehe Gerberti Opera Mathematica, hg. von Nicolaus BUBNOV, Berlin 1899, hier S. 32–35; Gillian R. EVANS, *The saltus Gerberti: The problem of the „leap“*, in: *Janus* 67 (1980) S. 261–268; WHITE (wie Anm. 2) S. 170 f.

⁴ München, BSB, Clm 14836, fol. 42r–44v. Edition: Maximilian CURTZE, *Die Handschrift No. 14836 der Königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München*, in: *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik* 7 (1895) S. 75–142, hier S. 105–109; Korrekturen dazu bei BORST (wie Anm. 1) S. 78 Anm. 45. Zur Deutung und Einordnung des Textes siehe ebd., S. 50–56.

⁵ $1+2+\dots+2n = n(2n+1)$; $1+2+\dots+(2n+1) = (n+1)(2n+1)$; $1+3+\dots+(2n+1) = (n+1)^2$; $2+4+\dots+2n = n(n+1)$.

zweite Abschnitt: Hier wird die Proportionenlehre des Boethius so umgebaut, dass aus den Proportionen Ketten natürlicher Zahlen entstehen. Wesentlich ist, dass hier nicht, wie bei Boethius, Proportionsreihen gebildet werden, die mit der Eins beginnen und ohne Ende fortgeführt werden können, sondern dass man mit einer gegebenen einfachen Zahl beginnt und bis zu einer anderen gegebenen zusammengesetzten (wir würden sagen: mehrstelligen) Zahl gelangen will. Dabei sollen die Proportionen auf dieser begrenzten Strecke in einer logischen Stufenfolge abgetragen werden, und zwar so, dass das letzte Glied einer Proportion gleichzeitig das erste Glied der nächsten Proportion ist. Auf diese Weise entsteht eine Kette aufsteigender Zahlen.

Das Verfahren wird klarer, wenn man es an einem Zahlenbeispiel erläutert, etwa an der Aufgabe, von 1 bis 100 zu gelangen (siehe Taf. 1): Ausgehend von 1, beginnt man mit den *multiplies*. Das Verhältnis 2:1 führt zu den Zahlen 2 und 4. Es macht keinen Sinn, hier weiterzumachen, wenn man bis 100 kommen will. Also geht man zu den *superparticulares* über. Die zweimalige Anwendung des Verhältnisses 3:2 erzeugt die 6 und die 9. Weil die 9 ungerade ist, macht man mit dem Verhältnis 4:3 weiter und erhält 12 und 16. Hier ist wieder Schluss. Das Verhältnis 5:4 erzeugt 20 und 25; 6:5 erzeugt 30 und 36; 7:6 erzeugt 42 und 49; 8:7 erzeugt 56 und 64; 9:8 erzeugt 72 und 81; und 10:9 erzeugt schließlich 90 und 100 als Endpunkt. (Natürlich liegt diesem Verfahren die einfache Tatsache zugrunde, dass

$$1 \cdot (2:1) \cdot (2:1) \cdot (3:2) \cdot (3:2) \cdot \dots \cdot (10:9) \cdot (10:9) = 100$$

ist, weil sich alles bis auf die beiden letzten Zähler wegekürzt.) Man erhält also die Zahlenkette

$$1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36, 42, 49, 56, 64, 72, 81, 90, 100.$$

Bisher wurden noch nicht die *superpartientes* benutzt. Wenn man von den rechts stehenden Zahlen 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 ausgeht und auf sie in analoger Weise die *proportiones superpartientes* $(2n+1) : (n+1)$ anwendet, so erhält man die Zahlenreihen

$$15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190$$

und

$$25, 49, 81, 121, 169, 225, 289, 361.$$

Es ist zu bemerken, dass in der Schrift keine Zahlenbeispiele gegeben werden, sondern nur das Verfahren erklärt wird. Ausgangspunkt ist ein *digitus*, d. h. eine einstellige Zahl; das Ziel ist ein *articulus*, d. h. eine zusammengesetzte Zahl.

Wer war der Autor und was beabsichtigte er mit seiner Schrift? Sein Name ist nicht bekannt, aber er gehörte zu einer Gruppe von Würzburger Gelehrten, die sich für die Umformung von Proportionen interessierten⁶. Er bezeichnet sich selbst als *abacista*, also als Fachmann für das Rechenbrett, der das schwierige und bisher

⁶ „Außerdem findet man in dieser Rechnung Umformungen von allen Arten der Vielfachen. Aber wir Würzburger (*nos Wirzeburgenses*) verschieben die Erörterung, bis wir wissen, was die heutigen Philosophen von dieser Sache halten, ob sie unsere Erfindung annehmen oder die der Alten.“ Übersetzung nach BORST (wie Anm. 1) S. 54, lateinischer Text bei CURTZE (wie Anm. 4) S. 109, Z. 123–126.

unbearbeitete Thema auch den Nichtfachleuten erklären möchte⁷. Der Text ist also in Würzburg entstanden und beruht auf dem Studium der Proportionen, wie man sie in Boethius' „Arithmetik“ findet. Der Autor hat, sozusagen spielerisch, die Proportionen benutzt, um eine Kette von Zahlen zu bilden, die von einer einfachen zu einer zusammengesetzten Zahl führen und dabei die drei einfachsten Arten der Proportionen repräsentieren: er verquickte, wie Borst sagt⁸, Zahlentheorie und Rechenpraxis. Dies ist für seine Zeit ungewöhnlich.

Der Herausgeber dieses Textes, Maximilian Curtze, hat den Inhalt richtig gedeutet. Er bemerkte aber nicht, dass alle Zahlen, die auf diese Weise erzeugt wurden, in der *Rithmomachie* benutzt wurden. Dies hat erst Arno Borst erkannt. Er zeigte, dass die Schrift ‚*De aggregatione naturalium numerorum*‘ ein Bindeglied zwischen der „Arithmetik“ des Boethius und dem ältesten Text zur *Rithmomachie* bildet, und konnte dadurch die Entstehung des Zahlenkampfspiels zuverlässig klären.

Arithmetische Studien wurden seit Ende des 10. Jahrhunderts an verschiedenen deutschen Domschulen betrieben. Um 996 erbat sich Kaiser Otto III. von Gerbert eine Handschrift von Boethius' „Arithmetik“, und diese gelangte vermutlich wenig später nach Bamberg. Andere Zentren arithmetischer Studien waren Hildesheim und Lüttich und vor allem Würzburg unter dem Domschulmeister Pernolf (zwischen 1022 und 1042). Dort entstand, wohl zur Zeit von Pernolf, auch die Schrift ‚*De aggregatione naturalium numerorum*‘. Um 1030 gerieten die Wormser und die Würzburger Domschule in einen Wettstreit. Offenbar regte der Kanzler des Kaisers Konrad II., der beiden Bischofsstädten, Worms und Würzburg, nahe stand, an, beide Schulen sollten einen Wettkampf der Gelehrsamkeit austragen, und zwar nicht durch Streitgespräche, sondern durch schriftliche Texte; Einzelheiten lassen sich aus zeitgenössischen Briefen rekonstruieren⁹. In diesem Zusammenhang wurde vermutlich die Schrift ‚*De aggregatione naturalium numerorum*‘ von einem Schüler Pernolfs im Reich herumgeschickt¹⁰. Die Schrift endet mit den Worten: „Aber wir verschieben die Erörterung, bis wir wissen, was die heutigen Philosophen von dieser Sache halten, ob sie unsere Erfindung annehmen oder die der

⁷ „Wie ein Vater mit dem Säugling, um von ihm verstanden zu werden, freiwillig lallt, so möchte ich als Fachmann für das Rechenbrett dir durch schlichte und einfache Sprache den Weg zum Verständnis des Vorzubringenden bereiten, soweit es das schwierige und dunkle Thema zulässt. Es ist ja noch unbearbeitet, wurde aus den Schatzkammern der Weisheit erst neuerdings hervorgeholt und erschließt sich nur denjenigen, die im Rechnen mit Zahlen gut geübt sind, auch ihnen nur, wenn sie ihren Geist mit aller Anspannung einsetzen.“ Übersetzung nach BORST (wie Anm. 1) S. 53 f., lateinischer Text bei CURTZE (wie Anm. 4) S. 106, Z. 30–36 (*vel filio* ist zu streichen; statt *ita* muss *tibi* gelesen werden).

⁸ Vgl. BORST (wie Anm. 1) S. 51.

⁹ Vgl. ebd., S. 55 f.

¹⁰ Borst behauptet dies als Faktum (ebd., S. 51). Offenbar bezieht er die Erwähnung eines *opus mathematicum* (S. 55 u. 56 Anm. 7) auf diese Schrift.

Alten¹¹. Die „Alten“ sind vermutlich karolingische Lehrer, die sich mit der Proportionenlehre noch nicht auskannten¹².

Es verwundert nicht, dass Würzburg auch der Ort ist, in dem das Zahlenkampfspiel erfunden wurde. Der älteste Text über dieses Spiel dürfte um 1030 entstanden sein¹³. Alle Handschriften, die diesen Text überliefern, bezeichnen als Erfinder des Spiels einen Würzburger Geistlichen¹⁴. Nur ein Codex fügt seinen Namen hinzu: Asilo. Dieser Asilo könnte mit dem Domschüler Adalbero identisch sein, der später Bischof von Würzburg wurde, doch kommen auch Hezilo von Hildesheim oder Atto von Amorbach in Betracht¹⁵. Asilo erklärt in knappen Worten¹⁶ die wesentlichen Elemente des Spiels. Manches wird nur angedeutet; anderes bleibt unklar. In den einleitenden Worten verweist Asilo darauf, dass die fünf Arten der Ungleichheit aus der Gleichheit entstehen. Diese Aussage findet man bei Boethius, der zeigt, wie man die verschiedenen Proportionen aus der Einheit erzeugen kann. Für das Spiel werden nur die drei einfachsten Typen, nämlich die *multiplices*, *superparticulares* und *superpartientes*, benötigt. Der Autor spricht nicht von „Spiel“, sondern von *conflictus* oder *altercatio*. Auch der Name „Rithmomachie“ begegnet noch nicht. Es gibt ein Brett, das auf der Längs- und Breitseite in Felder eingeteilt wird¹⁷, jedoch wird die Anzahl der Felder nicht angegeben. Vermutlich gab es eine Zeichnung des Bretts, die aber in den Handschriften nicht erhalten ist; die früheste überlieferte bildliche Darstellung findet man in einem Text, der etwa 70 Jahre später entstanden ist¹⁸. Auf dem Brett gibt es Steine. Sie tragen Kopffzahlen, die die drei Arten der Proportionen repräsentieren: die *multiplices*, die *superparticulares* und die *superpartientes*. Asilos Beschreibung ist sehr unklar. Über die Anordnung der Steine wird nur gesagt, dass sie auf beiden Seiten in den jeweils letzten Feldern stehen. Aus der Beschreibung muss man sich mühselig zusammensuchen, dass jede Partei offenbar über 24 Steine verfügt, je acht für jede Proportion. Asilo beziffert nur die Kopffzahlen der *multiplices*; die Zahlen auf den übrigen Steinen muss man aus der Schrift ‚De aggregatione naturalium numerorum‘ berechnen. Einige Zahlen stellen *multiplices* dar, die „von einer geraden Zahl benannt sind“, andere solche, die „von einer ungeraden Zahl benannt sind“¹⁹. Es gibt also offenbar eine „gerade“ und eine „ungerade“ Partei. Die Steine haben vier Farben: weiß sind die *multiplices* der „Geraden“ und die *superparticulares* der „Ungeraden“, schwarz sind die *multiplices* der „Ungeraden“ und die *superpartientes* der „Geraden“, rot sind die *super-*

¹¹ Siehe Anm. 6.

¹² So BORST (wie Anm. 1) S. 54.

¹³ Zu diesem Text vgl. ebd., S. 57–80, Edition ebd., S. 330–334.

¹⁴ Ebd., S. 330, Z. 4 f.: *quidam ex clero Wirciburgensi [...] dabit posteritati*.

¹⁵ Die Autorschaft wird ausführlich diskutiert bei Borst (vgl. ebd., S. 57–60).

¹⁶ Die Edition umfasst (ohne die Apparate) weniger als drei Druckseiten.

¹⁷ BORST (wie Anm. 1) S. 330, Z. 6: *tabula in longitudine et latitudine [...] distincta campis*.

¹⁸ Vgl. Anm. 45.

¹⁹ BORST (wie Anm. 1) S. 331, Z. 9 u. 12: *ex pari* bzw. *ex impari denominatas multiplices proportionones*.

particulares der „Geraden“, und grün sind die *superpartientes* der „Ungeraden“²⁰. Wir erfahren nichts über die Form der Steine, aber es wird gesagt, dass die *multiplikes* kleiner und die anderen Steine größer sind. Das Ganze ist sehr verwirrend und kaum verständlich. Der Sinn erschließt sich eigentlich nur aus späteren Texten. Gemeint ist Folgendes:

Zeile		Heer der Geraden				Heer der Ungeraden				Faktor	Wert
I	<i>multiplikes</i>	2	4	6	8	3	5	7	9	n	n
II		4	16	36	64	9	25	49	81	n	n^2
III	<i>superparticulares</i>	6	20	42	72	12	30	56	90	$(n+1):n$	$n(n+1)$
IV		9	25	49	81	16	36	64	100	$(n+1):n$	$(n+1)^2$
V	<i>superpartientes</i>	15	45	91	153	28	66	120	190	$(2n+1):(n+1)$	$(n+1)(2n+1)$
VI		25	81	169	289	49	121	225	361	$(2n+1):(n+1)$	$(2n+1)^2$

Das „gerade“ Heer wird von den geraden Einern (*digiti*) erzeugt, also von den Zahlen 2, 4, 6, 8, und das „ungerade“ Heer von den ungeraden Einern 3, 5, 7, 9. Da die Eins im Sinne der Zahlentheorie keine Zahl ist, hat sie hier keinen Platz. Ausgehend von diesen Zahlen stellen die folgenden Reihen die *proportio multiplex* (Zeile II), die *proportio superparticularis* (Zeilen III und IV) und die *proportio superpartientes* (Zeilen V und VI) dar. Bei den *multiplikes* (Zeile II) beschränkt man sich auf den Fall $m = n$, so dass jede Zahl das Quadrat der darüberstehenden Zahl ist. Bei den *superparticulares* in Zeile III und IV entsteht jede Zahl aus der darüberstehenden durch Multiplikation mit $(n+1):n$. Bei den *superpartientes* in Zeile V und VI beschränkt man sich auf den Fall $m = n-1$. Dadurch entsteht jede Zahl aus der darüberstehenden durch Multiplikation mit $(2n+1):(n+1)$. Man sieht, dass es im „geraden“ Heer auch „ungerade“ Zahlen gibt, und man erkennt:

(1) In Zeile II, IV, VI stehen Quadrate, die in Zeile VI immer ungerade sind; in Zeile II sind sie beim geraden Heer gerade, beim ungeraden ungerade; in Zeile IV ist es genau umgekehrt.

(2) Die Zahlen in Zeile III bzw. V ergeben sich durch Addition der beiden darüberstehenden Zahlen.

Auf diese Weise ergeben sich 48 Zahlen, die auf die Spielsteine aufgetragen werden. Es gibt einige Zahlen, die bei beiden Parteien vorkommen (etwa 9, 25, 49, 81;

²⁰ Ebd., S. 331, Z. 9–25.

16, 36, 64); die Zahlen 25 und 81 begegnen uns sogar dreimal, nämlich in jeder der drei Klassen.

Zwei Steine haben eine Sonderstellung: die 91 in der geraden und die 190 in der ungeraden Mannschaft. Beide gehören den *superpartientes* an. Beide werden „Pyramiden“ genannt. Das Besondere besteht darin – was Asilo allerdings nicht sagt –, dass sie sich als Summe von Quadratzahlen darstellen lassen:

$$91 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 \text{ und}$$

$$190 = 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2.$$

Man kann die 91 also als Pyramide aus 6 Stufen deuten, die als Seiten die Zahlen 1 bis 6 tragen, und die 190 als Pyramidenstumpf aus 5 Stufen mit den Seiten 4 bis 8. 91 ist also eine vollkommene Pyramide (*pyramis perfecta*) mit der Basis 36 und 190 eine „dreifach verkürzte“ Pyramide (*pyramis ter curta*) mit der Basis 64²¹.

Die Figuren dürfen sich nach Regeln bewegen, die nach den drei Zahlenklassen spezifiziert sind. Nach Asilo ziehen die *multiplikes* ins zweite, die *superparticulares* ins dritte und die *superpartientes* ins vierte Feld in eine beliebige Richtung, auch „abgeknickt“ (*angulariter*)²². Es bleibt unklar, ob das Feld, auf dem die Figur stand, mitgezählt wird. Über die Bewegungsmöglichkeiten der Pyramiden wird nichts gesagt.

Trifft eine Partei auf einen gegnerischen Stein, so kann dieser unter Umständen geraubt werden. Hierfür gibt es bei Asilo fünf Regeln²³:

- Wenn die Zahl eines Steines multipliziert mit der Felderzahl, die ihn von einem feindlichen trennen, die Zahl des feindlichen Steines ergibt, ist dieser geschlagen.
- Schließen zwei Steine einer Partei einen der anderen so ein, dass dessen Feld im nächsten Zug für beide erreichbar wäre, und ist die Summe der beiden ersten Zahlen gleich der eingeschlossenen, so ist dieser geschlagen.
- Trifft ein Stein durch einen ihm zustehenden Zug auf einen gleichzahligen der Gegenpartei, so ist dieser geschlagen.
- Die vierte Regel betrifft das Schlagen der Pyramide. Sie fällt, wenn ihre Grundfläche, also das jeweilige Quadrat, getroffen wird.
- Schließlich kann ein gegnerischer Stein genommen werden, wenn er so von eigenen Steinen umzingelt wird, dass er nicht „entkommen“ kann.

Die Regeln sind sehr knapp formuliert, so dass manche Fragen offen bleiben.

Um den Sieg zu erringen, muss man in der Hälfte des Gegners aus drei Steinen eine arithmetische oder harmonische Reihe bilden. Wie dies im Einzelnen geschieht und welche Möglichkeiten es gibt, sagt Asilo nicht. Er behauptet, dass es auf beiden Seiten mehrere Möglichkeiten gibt, um Steine im arithmetischen Mittel anzuordnen, während bei einer harmonischen Reihe ein Stein des Gegners hinzugefügt werden muss²⁴. Zum Schluss verwahrt sich der Autor gegen den Vorwurf,

²¹ Vgl. ebd., S. 332 f., Z. 35–40.

²² Vgl. ebd., S. 332, Z. 26–28.

²³ Vgl. ebd., S. 332 f., Z. 29–46.

²⁴ Vgl. ebd., S. 333 f., Z. 47–57.

die Zahlen seien „wirr und ungeordnet“ ausgewählt²⁵, und verweist auf Boethius, der gezeigt habe, dass jede Ungleichheit aus einer Gleichheit entsteht.

Insgesamt bleibt manches in Asilos Text unklar; seine Angaben über Spielbrett, Felder, Aufstellung und Gangart der Steine sind noch undeutlich.

4. Hermanns Schrift

Arno Borst bezeichnet Asilos Schrift als „Rundschreiben, das sie [die Entstehung des Zahlenkampfspiels] bekannt gab“²⁶, und vermutet, dass „auf dieses Rundschreiben [...] mehrere der angesprochenen Fachleute geantwortet haben“ könnten²⁷. Allerdings weist der Text selbst nicht konkret auf ein „Rundschreiben“ hin²⁸. Wie dem auch sei: Es gibt eine kurze Schrift, die sich auf Asilos Text bezieht, und diese wurde offenbar von Hermannus Contractus verfasst. Borst schreibt²⁹: „Ihr Verfasser gab keinen Eigennamen, Wohnsitz und Zeitpunkt an; trotzdem lässt sich erschließen, wann und wo er schrieb und wie er hieß. Denn seine Stellungnahme ist die eigenwilligste Verlautbarung in der Geschichte des Zahlenkampfes. Der Autor gehörte zu den führenden Gelehrten der Epoche; er äußerte sich so sachverständig und selbstsicher, daß die Zeitgenossen nicht nach seinem Namen fragten.“ Hier genügt es, die Indizien, die Borst bringt³⁰, zusammenzufassen. Es gibt neun Handschriften, die diesen Text überliefern. Sie zeigen, dass die Schrift vor 1077 entstand und dass ihr Autor in einer süddeutschen oder französischen Abtei wirkte, die an den Reformbestrebungen des frühen 11. Jahrhunderts teilnahm. Johannes Trithemius erwähnt in seinem Schriftstellerkatalog von 1494 unter Hermanns Namen eine Schrift mit demselben Incipit. Direkt auf die Reichenau weisen spezielle Formulierungen, die man auch in Musiktraktaten, die dort entstanden sind, findet. Hermann hatte die Gewohnheit, Instrumente für das Quadrivium zu kommentieren, z. B. Monochord, Abakus, Astrolab, Säulchen-Sonnenuhr, und seine Vorliebe für didaktische Spiele ist bekundet. Aus all diesen Gründen kann kein anderer als Hermann der Autor dieser Schrift sein.

Jetzt zum Inhalt von Hermanns Traktat³¹. Er will keine umfassende Beschreibung des Spiels liefern, sondern Asilos Entwurf, den er kannte, erläutern und verbessern. Borst fasst Hermanns Kritikpunkte an Asilos Version zusammen: „Unschärfen in der logischen Gliederung und im sprachlichen Ausdruck, das Fehlen konkreter Beispiele und theoretischer Definitionen, die Überschätzung einfacher

²⁵ Ebd., S. 334, Z. 58: *Nemo arbitretur confuse et inordinate numeros hos positos esse.*

²⁶ Ebd., S. 56.

²⁷ Ebd., S. 81.

²⁸ Es gibt lediglich in einer der vier Handschriften, die die Schrift überliefern, einen Einschub *ut cernitis* (ebd., S. 57).

²⁹ Ebd., S. 81.

³⁰ Vgl. ebd., S. 81–84.

³¹ Zum Folgenden vgl. ebd., S. 85–97.

Rechenarten zu Lasten schwieriger Zahlenreihen, schließlich die Vernachlässigung der Musik³².

Was ist neu bei Hermann? Er sagt, dass die Steine der geraden (bzw. ungeraden) Partei von den geraden (bzw. ungeraden) Zahlen *abgeleitet* werden (*denominantur*); dies impliziert, dass sie nicht alle gerade (bzw. ungerade) sein müssen (Kap. 1³³). Er erwähnt nicht die Zahlen, die bei den *multiplices* in Frage kommen; dies müssen die Leser, ebenso wie bei den übrigen Gruppen der Proportionen, selbst herausfinden. Bei den Schlagmöglichkeiten (Kap. 3 und 4) hat Hermann die Reihenfolge geändert: Er bringt zuerst die dritte Regel, dann die zweite, die erste und die vierte; die fünfte Regel fehlt. Dies ergibt eine logische Abfolge von der einfachsten zu den schwierigeren Vorschriften. Für die Multiplikations- und für die Summenregel gibt er zwölf Zahlenbeispiele, also nur eine Auswahl der Möglichkeiten.

Bei der vierten Regel, die sich auf die Pyramiden bezieht, stellt er klar, dass mit der Anzahl der Zwischenräume die Zahl der Zwischenfelder gemeint ist und demnach die Felder, auf denen die Figuren stehen, nicht mitgezählt werden (Kap. 5). Noch bedeutendere Änderungen gibt es in den Kapiteln 6–9, die sich mit der Aufstellung einer Siegposition befassen. Auffällig sind hier vor allem seine Zahlenbeispiele, die bei der harmonischen Proportion in Frage kommen; sie berücksichtigen auch die Tatsache, dass es Zahlen gibt, die in beiden Mannschaften vorkommen. Bei der arithmetischen Folge gibt er, anders als Asilo, ein Zahlenbeispiel. Er fügt hinzu: „Die sonstigen Möglichkeiten mag erforschen, wer daran Vergnügen findet, sich dieser Dinge mit Sorgfalt anzunehmen“³⁴. Wie Asilo definiert auch Hermann sowohl das harmonische als auch das arithmetische Mittel, jedoch kürzer und klarer als jener.

Eine Neuerung gegenüber Asilo besteht darin, dass Hermann die Möglichkeit eröffnet, eine „vollkommene“ Siegposition zu errichten (Kap. 9). Sie besteht aus den vier Zahlen 12, 9, 8 und 6 und zeichnet sich dadurch aus, dass in ihr drei Mittel vertreten sind und außerdem die Zahlenverhältnisse aller harmonischer Intervalle in der Musik³⁵. Tatsächlich ist 9 das arithmetische Mittel *A* zwischen den äußeren Zahlen $a = 6$ und $b = 12$, und 8 ist das harmonische Mittel *H* zwischen ihnen. Die dritte Proportion ist die so genannte „musikalische Proportion“, die darauf beruht, dass zwischen beliebigen Zahlen *a* und *b* und den beiden Mitteln *A* und *H* die Beziehung besteht: $a : H = A : b$ (in diesem Fall also $6 : 8 = 9 : 12$)³⁶. Der Überlieferung nach soll diese Proportion in Babylon erfunden und von Pythagoras nach Grie-

³² Ebd., S. 85.

³³ Die Kapitelzählung folgt der Edition von Borst (vgl. ebd., S. 335–339).

³⁴ Ebd., S. 338, Z. 50f.: *Caeteros investiget, si quem his diligentiam adhibere delectet.*

³⁵ Ebd., S. 338, Z. 52–54: *... perfectam et maximam conetur ponere armoniam. Quae quatuor existens terminis XII, VIII, VIII, VI, ternas in se retinet medietates et insuper omnium musicarum simphoniarum proportiones.*

³⁶ Borsts Aussage (ebd., S. 89), es handle sich beim Vergleich zwischen 12 und 8 sowie 9 und 6 um eine geometrische Proportionalität, ist nicht korrekt. Es geht hier um Mittel (*medietates*) und nicht um Proportionen.

chenland gebracht worden sein. Diese Beziehung wird in Boethius' „Musik“ (I.10–11) und im Schlusskapitel von Boethius' „Arithmetik“ (II.53) ausführlich behandelt, und Hermann erwähnt sie auch in seinem Musiktraktat³⁷. Bekanntlich spielen diese Zahlen auch auf dem Monochord eine Rolle, denn $12:6 = 2:1$ bezeichnet die Oktave, $12:9 = 4:3$ die Quarte und $12:8 = 3:2$ die Quinte. In der Praxis ist allerdings die hier vorgeschlagene „vollkommene“ Siegesposition kaum zu erlangen, da man hierzu mindestens einen zusätzlichen Stein vom Gegner braucht. Es hat den Anschein, als ob Hermann hier sein Interesse an der Musiktheorie eingebracht und sich nicht besonders für die Praxis des Spiels interessiert hat.

Präziser als Asilo hat Hermann die Pyramiden beschrieben (Kap. 10). Er gibt explizit an, aus welchen Quadratzahlen sich die beiden Pyramiden zusammensetzen, während Asilo nur die Zahlen der Grundflächen genannt hatte. Außerdem unterscheidet er zwischen den Seitenlängen der einzelnen Schichten und ihrer Fläche. Dies entspricht dem Vorgehen von Boethius in seiner „Arithmetik“, der bei den Pyramidalzahlen genauso verfahren war, und bestätigt wieder einmal, wie gut Hermann das Werk des Boethius kannte.

Mit diesem Abschnitt endet Hermanns kurze Schrift. In einer einzigen, aber wichtigen Handschrift aus Fleury³⁸ folgt aber noch ein Nachtrag, der sich auf den Begriff *monadica superficies* bei Asilo bezieht (Kap. 11). Diese Bemerkungen passen nicht recht zum Vorhergehenden. Borst nimmt an, dass es sich hier um einen Zusatz handelt, den Hermann selbst nachtrug und der nur an einige Empfänger weitergeschickt wurde. Dies würde auch Unterschiede in den neun Textzeugen erklären, die sich in zwei Zweige gliedern: einen französischen, der an die Handschrift aus Fleury anknüpft, und einen „süddeutschen Zweig“, der Hermanns Text unter seine sonstigen Schriften einreichte³⁹.

Insgesamt gesehen, handelt es sich nicht um ein literarisch ausformuliertes Werk, sondern um schnell hingeworfene Notizen. Es gibt keine Einleitung, keinen Schluss und keinen direkten Hinweis auf den Autor. Borst hat versucht, die Schrift chronologisch in Hermanns Opus einzuordnen, insbesondere in Hinblick auf seinen Musiktraktat, den Borst in die frühen 1030er Jahre setzt, und auf seine Schrift über den Abakus, die nach Borst vermutlich Ende der 1040er Jahre entstand⁴⁰. Vor allem aus stilistischen Gründen kommt er zum Ergebnis, dass seine Arbeit zum Zahlenkampfspiel wohl am ehesten Anfang der 1040er Jahre geschrieben wurde.

³⁷ Vgl. Leonard ELLINWOOD, *Musica Hermanni Contracti*, Rochester ²1952, hier S. 21.

³⁸ Vatikan, BAV, Reg. lat. 598 (s. XI).

³⁹ BORST (wie Anm. 1) S. 93.

⁴⁰ Vgl. ebd., S. 94–96.

5. Bemerkungen zur weiteren Entwicklung des Spiels

Durch Hermanns Schrift war das Zahlenkampfspiel vor allem in Süddeutschland, aber auch in Fleury bekannt geworden⁴¹. Bis 1130 entstanden in Süddeutschland, aber auch am Nordwestrand des Reiches fünf weitere, ebenfalls recht kurze Bearbeitungen, die zum Teil von Hermanns Text beeinflusst wurden. Hier können nur kurze Bemerkungen gemacht werden (siehe Taf. 4)⁴².

Um 1070 verfasste ein unbekannter Mönch vermutlich in Lüttich eine Gebrauchsanleitung („Lütticher Anonymus“). Der Autor schrieb erstmals die Größe des Spielfelds vor (12×8 Felder), legte die Größen der Steine fest und hatte deutliche Vorstellungen von ihrer Aufstellung; aus seinen Beschreibungen kann man das Rechenbrett mit seinen Figuren rekonstruieren (siehe Taf. 2)⁴³. In dieser Zeit lässt sich erstmals der Name „Rithmachia“ nachweisen, und zwar nicht in einem Text über diese Schrift, sondern in einer Abhandlung über das Rechenbrett, die vermutlich um 1080 entstand und von dessen Autor nur der erste Buchstabe „G.“ bekannt ist⁴⁴.

Recht verbreitet war eine anonyme Abhandlung, die um 1090 entstanden sein muss. Mit großer Wahrscheinlichkeit war Odo von Tournai ihr Verfasser. Odos Darstellung ist konsistent. Sie verbindet Zahlentheorie und Rechenpraxis. Das Werk wurde von Odos Schülern und späteren Benutzern mit verschiedenen Anhängen versehen.

In St. Emmeran entstand zwischen 1080 und 1100 ein weiterer Traktat („Regensburger Anonymus“). Die Darstellung ist an Asilo und Hermann ausgerichtet. Auf ihr beruht ein Spielbrett, das Thiemo von Michelsberg bei Bamberg kurz vor 1100 aufzeichnete (siehe Taf. 3)⁴⁵. Auffällig ist, dass er die Steine säuberlich nach den Klassen der Proportionen einzeichnete, nicht aber in der „geknickten“ Form, wie sie wohl schon beim „Lütticher Anonymus“ aufgestellt waren.

Aus der Zeit um 1100 stammen zwei flüchtige Kompilationen. Eine davon wurde zwischen 1087 und 1110 wohl in Moselfranken, vielleicht in Trier, verfasst („Fränkische Kompilation“). Die andere („Bayerische Kompilation“) entstand fast gleich-

⁴¹ Von den neun Handschriften stammen sechs aus dem 11. oder 12. Jahrhundert. Drei von ihnen wurden in Süddeutschland geschrieben, zwei weisen nach Fleury und eine ist englischen oder normannischen Ursprungs.

⁴² Das Folgende beruht wesentlich auf FOLKERTS, Art. Rithmimachia; DERS., Rithmimachie sowie DERS., Rithmomachia (alle wie Anm. 1). Detaillierte Angaben findet man bei BORST (wie Anm. 1). Die Bezeichnungen der Texte stammen von Borst. In Taf. 4 wird versucht, die Beziehungen zwischen den verschiedenen Texten in Form eines Stemmas darzustellen.

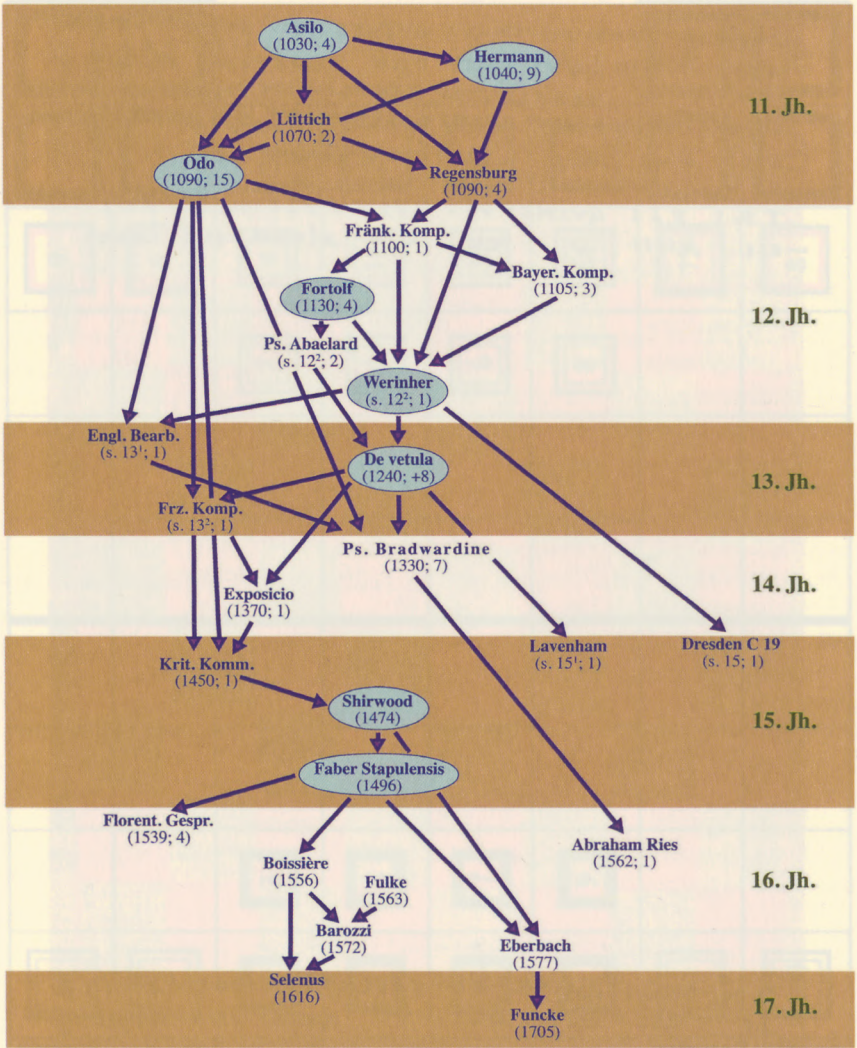
⁴³ Rekonstruktion nach BORST (wie Anm. 1) S. 107.

⁴⁴ Der Autor schreibt dort an seinen Lehrer: *Mitte nobis si placet ad transcribendum arithmetica[m] diuque desiderata[m] rithmachiam*; über dem *ma* ist *mi* hinzugefügt (Peter TREUTLEIN, *Scritti inediti relativi al calcolo dell' abaco*, in: *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* 10 (1877) S. 595–647, hier S. 607). „G.“ ist wahrscheinlich keine Abkürzung für *Gerlandus*. Zu möglichen Identifizierungen siehe Borst (wie Anm. 1) S. 111 f.

⁴⁵ Zum Spielplan siehe BORST (wie Anm. 1) S. 150 f.

quantitas		proportio	partes	copulativi		quantitas	proportio	partes	superpartientes	
I	II			I	II	I	II		I	II
1		singularis unitas	1/1							
1		dupla	2/1	2						
	2	dupla	2/1		4					
4		sesquialtera	3/2	6						
	6	sesquialtera	3/2		9	9	superbipart.	5/3	15	
9		sesquitertia	4/3	12			15	superbipart.	5/3	25
	12	sesquitertia	4/3		16	16	supertripart.	7/4	28	
16		sesquiquarta	5/4	20			28	supertripart.	7/4	49
	20	sesquiquarta	5/4		25	25	superquadrip.	9/5	45	
25		sesquiquinta	6/5	30			45	superquadrip.	9/5	81
	30	sesquiquinta	6/5		36	36	superquinqep.	11/6	66	
36		sesquisexta	7/6	42			66	superquinqep.	11/6	121
	42	sesquisexta	7/6		49	49	supersexpart.	13/7	91	
49		sesquiseptima	8/7	56			91	supersexpart.	13/7	169
	56	sesquiseptima	8/7		64	64	superseptemp.	15/8	120	
64		sesquioctava	9/8	72			120	superseptemp.	15/8	225
	72	sesquioctava	9/8		81	81	superoctopart.	17/9	153	
81		sesquinona	10/9	90			153	superoctopart.	17/9	289
	90	sesquinona	10/9		100	100	supernovempart.	19/10	190	
100		articularis unitas	1/1				190	supernovempart.	19/10	361

Taf. 1: ‚De aggregatione naturalium numerorum‘, Erzeugung von Zahlenketten unter Verwendung der Proportionenlehre. Rekonstruktion nach BORST (wie Anm. 1) S. 54.



Taf. 4: Beziehungen zwischen den Rithmomachie-Texten. Die Zahlen in Klammern bezeichnen bei ungedruckten Texten die vermutliche Entstehungszeit und die Anzahl der Handschriften, bei gedruckten Schriften das Jahr des Drucks.

zeitig, wohl in der Nähe von Regensburg, Immünster oder Tegernsee. In ihr wird erstmals ein Spielbrett von 16 Feldern Länge vorgeschlagen.

Die erste ausführliche Darstellung des Spiels wurde um 1130 von einem nicht näher identifizierbaren *Fortolfus* verfasst. Er lebte in Mainfranken, vielleicht am Würzburger Bischofshof. Das Werk ist ein Lehrbuch mit literarischen Ansprüchen, das Laien einen Zugang zur Rithmomachie öffnen will. Fortolf gab verbindliche Anweisungen zur Felderzahl, zum Spielplan und zu den Formen der Steine: es sind runde, kleine quadratische und große quadratische Steine. Auch ihre Farben wurden vorgeschrieben: Die drei Gruppen der geraden Mannschaft sind weiß, rot und schwarz, die der ungeraden Mannschaften schwarz, weiß und rot. Besonders ausführlich stellt Fortolf die Siegesmöglichkeiten dar. Er beschreibt als erster eine *victoria musica* und beweist dabei, dass sich sämtliche Zahlenverhältnisse in Tonbeziehungen umsetzen lassen.

Ein ausführlicher scholastischer Kommentar zu Fortolf entstand in der zweiten Hälfte des 12. Jahrhunderts in Frankreich („Pseudo-Abaelard“). In zwei Anhängen werden auch die musikalischen Intervalle arithmetisch abgeleitet.

Eine anonyme „Rithmachia“ stammt höchstwahrscheinlich von Werinher von Tegernsee⁴⁶. Er erhielt vor 1180 vom Propst Otto von Rottenbuch den Auftrag, ihm die Regeln der Rithmomachie mitzuteilen. Werinher sah, vermutlich als erster, für die *multiplies* runde, für die *superparticulares* dreieckige und für die *superpartientes* viereckige Steine vor; dies wurde später die Standardform.

Es gibt eine „Englische Bearbeitung“ aus dem Anfang des 13. Jahrhunderts, in der Werinher's Fassung mit dem Odo-Text vermischt wird. Der unbekannte Engländer übernahm von Werinher's Schrift Elemente für die Spielpraxis und beschränkte sich bei den Spielsteinen auf die Farben weiß und schwarz.

Recht verbreitet war das umfangreiche Gedicht *De vetula*, das zwischen 1222 und 1262 in Frankreich entstand. Ihr unbekannter Autor beschreibt Ovid's Leben. Zu seinen Jugendvergnügungen sollen auch Spiele gehört haben. Der Autor benutzt dies, um die wichtigsten davon zu beschreiben: Würfelspiel, Schach, Mühle/Trictrac und schließlich die Rithmomachie. Sie wird, ganz im Gegensatz zum Schachspiel, mit Begeisterung dargestellt und ist nach seinen Worten das schönste Spiel.

Durch *De vetula* wurde die Rithmomachie endgültig überall in Europa bekannt. Vor allem in England war das Spiel im 14. und 15. Jahrhundert recht verbreitet. Es gibt eine Bearbeitung aus dem Umkreis von Thomas Bradwardine († 1349) („Pseudo-Bradwardine“), einen umfangreichen Kommentar zu *De vetula* (um 1370, *Expositio artis armachie*), eine Rithmomachie von John Lavenham aus Colchester (Anfang 15. Jahrhundert), einen sehr umfangreichen „Kritischen Kommentar“, der sich bemüht, die Varianten in den verschiedenen Fassungen zu berücksichtigen und kritisch zu werten (Mitte 15. Jahrhundert), eine Arbeit des Bischofs von Durham,

⁴⁶ Ediert in Menso FOLKERTS, Die *Rithmachia* des Werinher von Tegernsee, in: *Vestigia Mathematica. Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard*, hg. von DEMS./Jan HOGENDIJK, Amsterdam/Atlanta 1993, S. 107–142.

John Shirwood, die 1482 als erstes Werk zur Rithmomachie gedruckt wurde, und schließlich eine Darstellung von Ralph Lever und William Fulke (1563).

Im 15. Jahrhundert zeigten auch Humanisten ihr Interesse am Spiel. Shirwoods Schrift veranlasste Jacques Lefèvre d'Étaples (Jacobus Faber Stapulensis), eine Kurzdarstellung des Spiels zu veröffentlichen (1496). Auf ihr beruht eine weit verbreitete Monographie des Mathematikers, Astronomen und Musikers Claude de Boissière (1554 französisch, 1556 lateinisch); von Boissière wiederum hängt eine Darstellung des Venezianers Francesco Barozzi ab (1572). Schon 1539 hatten die Florentiner Humanisten Carlo Strozzi, Benedetto Varchi und Luca Martini in Dialogform eine italienische Abhandlung über Proportionen und über den *Giuoco di Pittagora* verfasst („Florentiner Gespräch“).

In Deutschland fand die Rithmomachie seit dem 15. Jahrhundert Eingang in den Universitätsunterricht und wurde auch als Zeitvertreib des Adels betrieben. Die Fassung des Pseudo-Bradwardine war an den Universitäten Erfurt und Leipzig bekannt. Abraham Ries, ein Sohn des Rechenmeisters Adam Ries, verfasste 1562 in Annaberg wohl im Auftrag des Kurfürsten August von Sachsen eine *Arithmomachia*. Gottschalk Eberbach veröffentlichte 1577 in Erfurt eine Rithmomachie-Ausgabe. Der Herzog August II. von Braunschweig-Lüneburg gab 1616 unter dem Pseudonym „Gustavus Selenus“ eine Rithmomachie als Anhang zu seinem Schachbuch heraus. Die jüngste gedruckte Abhandlung veröffentlichte der Görlitzer Gymnasiallehrer Christian Gabriel Funcke im Jahre 1705.

Die Regeln, die in den verschiedenen Bearbeitungen präsentiert werden, differieren in vielen Punkten, aber die Grundideen blieben erhalten. So hat die Rithmomachie bis weit in die Neuzeit hinein nichts von ihrer Bedeutung eingebüßt.